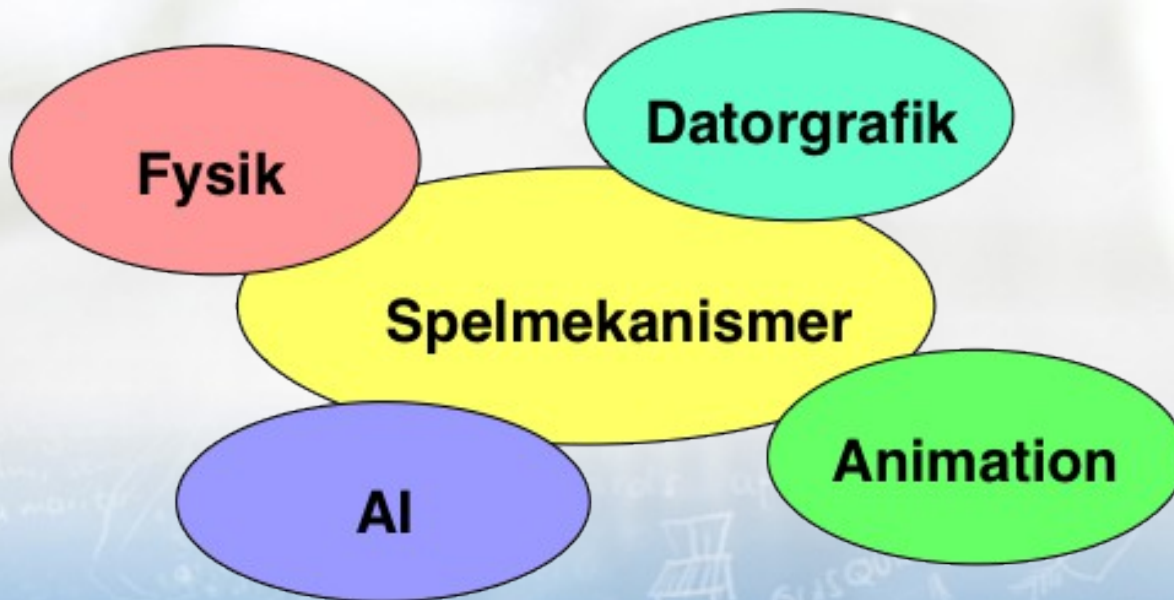


TBSK03

Teknik för avancerade Datorspel



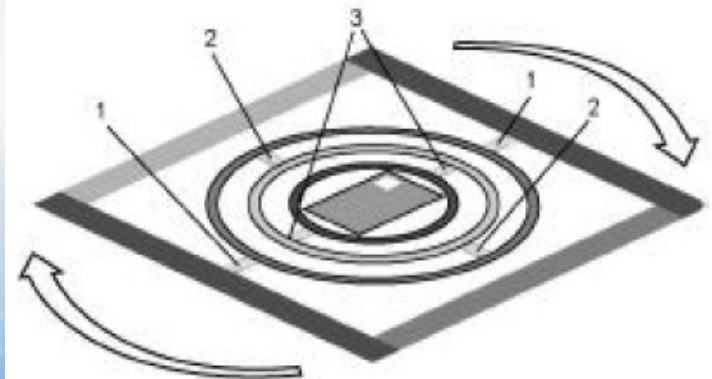
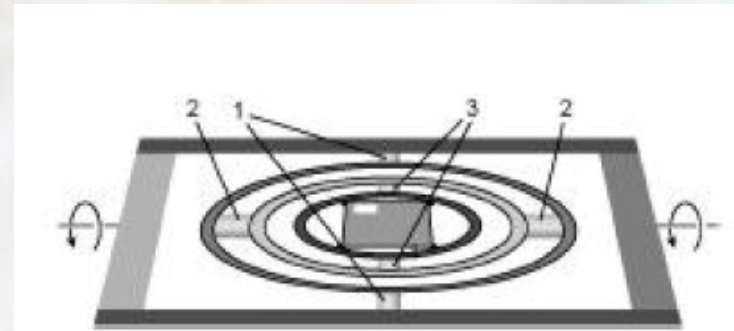
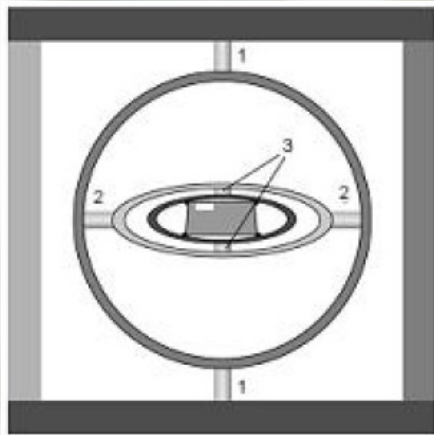
■ Eulervinklar

- Rotation kring axlarna (t.ex. Zyx)

$$A' = R_{\text{yaw}} R_{\text{pitch}} R_{\text{roll}} A$$

- Intuitivt, fast svårt att göra
- Interpolation av rotation nontrivialt, problem med olinjärt beteende
- Problem med gimbal lock kan förekomma

- Gimbal lock



3(22)

Representation av rotation

- Andra möjligheter
 - Orthonormal matris
enkelt att kombinera olika operationer
 - (rotation, translation mm)
 - Separat rotationsaxel och vinkel
 - 3-komponent vektor (nästan som quaternion)
längd=vinkel

- Men hur gör man interpolation?

- Formulerat av Sir William Rowan Hamilton
 - Letade efter tredimensionella komplexa tal
- Längre bortglömt, comeback på senare 1900-tal
 - Används för rotationen inom (rymd)flyget, robotik mm



- Definition: Kvaternion $q = w + xi + yj + zk$, med w, x, y, z reella tal
- Kan också skrivas: $q = (w, \mathbf{n})$ där \mathbf{n} är en tredimensionell vektor (w realdel, \mathbf{n} imaginärdelen)
- Kan också betraktas som en rotation med vinkel v om en valfri axel \mathbf{n}

$$q = (\cos(v/2), \sin(v/2)\mathbf{n})$$

- Vektor r :
 - Skapa Kvaternion $p = (0, r)$
 - Kan nu roteras genom operationen:
 $p' = q \cdot p \cdot q^*$ (q^* = konjugat, definieras senare)
- Kan enkelt kombinera rotationer

- Flerdimensionell generalisering av komplexa tal
 - $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
- Flesta operationer fungerar som vanligt, dock inte kommutativitet på multiplikation $qp \neq pq$

- Multiplikation av i , j och k

	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	-j
j	j	-k	-1	i
k	k	j	-i	-1

- Multiplikation av två kvaternioner:

$$\begin{aligned}
 (w_1 + x_1i + y_1j + z_1k)(w_2 + x_2i + y_2j + z_2k) = & \\
 & w_1w_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2 \\
 & + (w_1x_2 + x_1w_2 + y_1z_2 - z_1y_2)i \\
 & + (w_1y_2 - x_1z_2 + y_1w_2 + z_1x_2)j \\
 & + (w_1z_2 + x_1y_2 - y_1x_2 + z_1w_2)k
 \end{aligned}$$

Räkna med kvaternioner

- Konjugat q^* :
 $q=(w,n)$, $q^*=(w,-n) = (w, -xi, -yj, -zk)$
- Magnitud:
 $|q|^2 = qq^* = q^*q = w^2 + |n|^2 = w^2 + x^2 + y^2 + z^2$
- Kvadratrot av magnitud = norm
- Enhetskvaternion: kvaternion med norm=1
 - Erhålles genom att dela kvaternion med norm
- Invers: $q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \cdot (w, -n)$

- Som matris:

Kvaternioner kan konverteras till matris genom:

$$M = \begin{bmatrix} 1 - 2(y^2 + z^2) & 2xy - 2wz & 2xz + 2wy \\ 2xy + 2wz & 1 - 2(x^2 + z^2) & 2yz - 2wx \\ 2xz - 2wy & 2yz + 2wx & 1 - 2(x^2 + y^2) \end{bmatrix}$$

alt.:

$$\begin{bmatrix} w^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2xy + 2wz & 2xz - 2wy & 0 \\ 2xy - 2wz & w^2 - x^2 + y^2 - z^2 & 2yz + 2wx & 0 \\ 2xz + 2wy & 2yz - 2wx & w^2 - x^2 - y^2 + z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & w^2 + x^2 + y^2 + z^2 \end{bmatrix}$$

- Men hur kommer vi från matris till kvaternion?

Tredimensionell matris:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & m \end{bmatrix}$$

Matrisspår:

$$T = a + e + m + 1$$

- Men hur kommer vi från matris till kvaternion?

Om $T \neq 0$:

$$w = \frac{1}{2} \sqrt{T} = \frac{1}{2} \sqrt{a + e + m + 1}$$

$$x = \frac{h - f}{4w}$$

$$y = \frac{c - g}{4w}$$

$$z = \frac{d - b}{4w}$$

- Men: problem om T är nästan noll (t.ex. rotationer på 180°)

- Möjlig lösning:

$$w = \text{sqrt}(\max(0, 1 + a + e + m)) / 2$$

$$x = \text{sqrt}(\max(0, 1 + a - e - m)) / 2$$

$$y = \text{sqrt}(\max(0, 1 - a + e - m)) / 2$$

$$z = \text{sqrt}(\max(0, 1 - a - e + m)) / 2$$

Teckenkorrektur

$$x = \text{copysign}(x, h - f)$$

$$y = \text{copysign}(y, c - g)$$

$$z = \text{copysign}(z, d - b)$$

$$\text{med } \text{copysign}(a, b) = a \cdot \text{sign}(a) \cdot \text{sign}(b)$$

- Exponentialfunktioner:

Vi definerar för $q = (\cos(v/2), \sin(v/2)n)$:

$$q^t = (\cos(tv/2), \sin(tv/2)n)$$

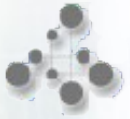
Dessutom för $q = (w, tn)$:

$$\exp(q) = e^w(\cos(t), \sin(t)n)$$

$\Leftrightarrow q = R \exp((0, n)t)$, med $|n| = 1$, $R=1$ för enhetskvaternion

$$\log(q) = (\log(R), nt)$$

$$\Leftrightarrow q^t = \exp(t \log(q))$$



- Spherical linear interpolation
- $\text{slerp}(t, q_1, q_2) = (q_2 q_1^{-1})^t q_1$
(med q_1, q_2 valfria kvaternioner, t interpolationssteg som är en reell tal mellan 0 t.o.m. 1)
- $q = (q_2 q_1^{-1})^t q_1 = q_1 (q_1^{-1} q_2)^t = q_2 (q_2^{-1} q_1)^{1-t} = (q_1 q_2^{-1})^{1-t} q_2$
- Interpolera med konstant hastighet

- Problem: Vid interpolation mellan flera kvaternioner med slerp blir det diskontinuitet i hastigheten när vi byter från ett kvaternionpar till nästa
- Samma problem om interpolation mellan punktpar

- Lösning (liknar Bézier el. Hermite splines):

Definerar:

$\text{squad}(t, a, p, q, b) = \text{slerp}(2t(1-t), \text{slerp}(t, a, b), \text{slerp}(t, p, q))$,
med a, b, p, q kvaternioner, t interpolationssteg

för att få kontinuitet vid interpolation:

$$q_i = a_i \exp(-(\log(a_{i+1} a_i^{-1}) + \log(a_{i-1} a_i^{-1}))/4)$$

och interpolera med

$$\text{squad}(t, a_i, q_i, q_{i+1}, a_{i+1}($$

SLERP = multiplikativ interpolation

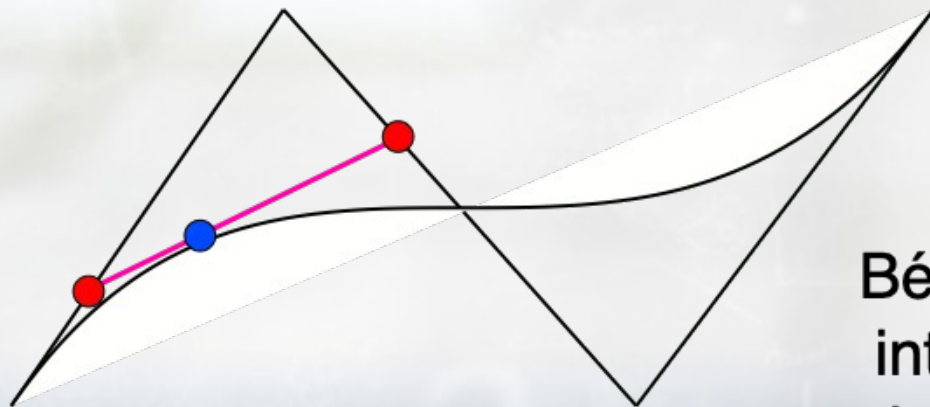
$$(a-b)t + b$$

Vanlig linjär

$$\left(\frac{a}{b}\right)^t \cdot b$$

Multiplikativ

**SQUAD = interpolation av
interpolationer, jfr de Casteljaou**



**Bézierkurva från
interpolation av
interpolationer**

Länkar

Wikipedia:

http://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation

Bok om matematik inom datorgrafik:

http://books.google.com/books?id=bfcLeqRUsm8C&lpg=PA86&ots=FpUpf6p_hw&dq=quaternions%20in%20computer%20graphics&pg=PA88#v=onepage&q=quaternions%20in%20computer%20graphics&f=false

Slerp paper:

<http://dl.acm.org/citation.cfm?doid=325334.325242>